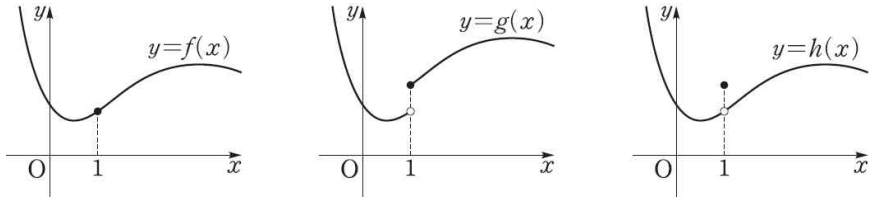


## ‘함수의 연속’

[수업 청사진]

- 개념: 함수의 연속
- 대상 학습자: 고등학교 2학년
- 수업 수준: 중상
- 결정적 특성: 1. 함수  $f(x)$ 가 실수  $a$ 에 대하여
  - (i)  $x = a$ 에서 정의되어 있고
  - (ii) 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하고
  - (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 일 때,  
함수  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 연속이라고 한다.
- 2. 함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속일 때의 세 가지 조건 중 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면  $x = a$ 에서 불연속이다.
- 가변적 특성: 없음 ? ready. (우리가 알아야 할 것?)

방법	실행
주의 집중	연속적으로 변하는 것과 불연속적으로 변하는 것들에 대한 전반적인 설명을 담은 영상을 보여줌으로써 학생들의 주의집중을 획득한다. 영상: <a href="https://www.vivasam.com/viewer/contentsView.do?lnbCode=D40002&amp;contentGubun=CN030&amp;contentId=126653&amp;libraryTitle=Y">https://www.vivasam.com/viewer/contentsView.do?lnbCode=D40002&amp;contentGubun=CN030&amp;contentId=126653&amp;libraryTitle=Y</a>
구별	- 실생활에서 끊어지지 않고 이어져 있는 것의 예를 들어보게 하고 이를 공유한다. (방법: 공동 문서 작업) - 학생들이 든 예 중에서 무엇이 ‘연속’의 실예인지 비예인지 구분해보게 한다.
개념 정의	각자 ‘연속’을 무엇이라고 정의할 것인지 작성하게 하고 이를 공유한다. (방법: 공동 문서 작업 중 한 가지) (단, 여기에서의 ‘연속’은 아직 수학적으로 엄밀하게 정의되는 연속이 아니고 우리가 직관적으로 이해하는 ‘연속’이다)
전이	일반적으로 ‘연속’이라고 하는 것과 함수가 ‘연속’이라고 하는 것은 다르며 교과서에서는 함수의 연속을 어떻게 정의하는지 알아보자고 한다.
구별	다양한 함수의 그래프를 보여주고 연속의 실예와 비예를 구분하게 한다.



[그래프 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]

개념 정의

- 함수의 '연속'을 무엇이라고 정의할 것인지 작성하게 하고 이를 공유한다. (방법: 공동 문서 작업)
- 교과서에 나온 함수의 연속 정의를 제시한다.

일반적으로 함수  $f(x)$ 가 실수  $a$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때,  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 **연속**이라고 한다.

- (i) 함수  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 정의되어 있다.
- (ii) 극한값  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

한편 함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 연속이 아닐 때,  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 **불연속**이라고 한다.

즉 함수  $f(x)$ 가 (i), (ii), (iii) 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면  $f(x)$ 는  $x = a$ 에서 불연속이다.

[정의 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]

실예

- '연속'에 대한 직관적 이해를 위해 함수  $f(x) = x + 1$ 의 그래프는 그림과 같이  $x = 1$ 에서 이어져 있음을 언급한다.
- $x = 1$ 에서 함수값이 존재하는지, 존재한다면 무엇인지 묻는다.
- $x = 1$ 에서 극한값이 존재하는지, 존재한다면 무엇인지 묻는다.
- $x = 1$ 에서 함수값과 극한값이 같은지 묻는다.
- 위의 함수  $f(x)$ 가 연속일 세 가지 조건을 모두 만족하므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 연속임을 설명한다.

[그래프 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]

비예

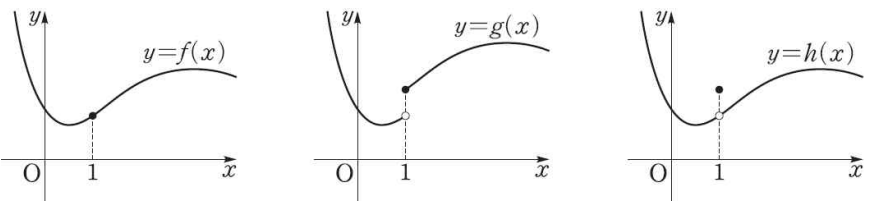
함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 불연속인 경우는  $x = 1$ 에서 연속일 때의 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않는 경우임을 이해시키기 위해 다음 각 경우의 함수의 예를 찾아 그 그래프를 그려보도록 한다.

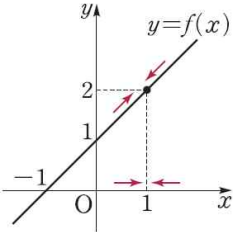
	<p>(1) <math>x=1</math>에서 정의되지 않고, 극한값 <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math>가 존재하지 않는다.</p> <p>(2) <math>x=1</math>에서 정의되지 않고, 극한값 <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math>가 존재한다.</p> <p>(3) <math>x=1</math>에서 정의되어 있고, 극한값 <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math>가 존재하지 않는다.</p> <p>(4) <math>x=1</math>에서 정의되어 있고, 극한값 <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math>가 존재하지만 <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)</math>이다.</p> <p>(방법: 소그룹 회의실 / 공동 문서 작업 중 한 가지) [네 가지 분류 출처: 좋은책신사고 수학II, 고성은 외]</p>	✓
연습		
실생활 관련 문제	주차 요금 안내표가 주어졌을 때 주차 시간에 따른 주차 요금을 직접 계산해보도록 하고, 주차 요금 함수의 그래프를 그려 보게 함으로써 주차 요금 함수가 특정한 값에서 불연속이 됨을 이해하도록 한다.	OK

[수업 교안]

방법	실행	시간
복습	<p>교사: (학생들과 두루 눈을 마주치며) 여러분, 반갑습니다. 지난 시간까지 함수의 극한을 배웠었죠? 모두들 기억하고 있나요?</p> <p>학생: 네</p> <p>교사: 좋아요. 그러면 OO이가 지난 시간에 배웠던 내용을 간단히 브리핑해주세요.</p> <p>OO: 네. 일반적으로 함수 <math>f(x)</math>에서 <math>x</math>의 값이 <math>a</math>가 아니면서 <math>a</math>에 한없이 가까워질 때, <math>f(x)</math>의 값이 일정한 값 <math>L</math>에 한없이 가까워지면 함수 <math>f(x)</math>는 <math>L</math>에 수렴한다고 하고 이때 <math>L</math>을 함수 <math>f(x)</math>의 <math>x=a</math>에서의 극한값 또는 극한이라고 합니다.</p> <p>교사: 잘했어요.</p>	2분
주의 집중	<p>교사: 오늘은 함수의 연속을 처음 나가는 날이에요. (영상을 재생시킬 준비를 하면서) 우선 영상 하나를 보여줄 테니 집중해서 잘 보도록 하세요.</p> <p>학생: 네.</p> <p>영상: <a href="https://www.vivasam.com/viewer/contentsView.do?lnbCode=D4000">https://www.vivasam.com/viewer/contentsView.do?lnbCode=D4000</a></p>	3분

	<p><a href="#">2&amp;contentGubun=CN030&amp;contentId=126653&amp;libraryTitle=Y</a></p> <p>교사: (아이들의 표정을 두루 살피며) 자, 어때요? 혹시 영상에서 인상 깊었던 게 무엇인지 △△이가 말해볼까요?</p> <p>△△: 시간에 따라 연속적으로 변하는 것과 불연속적으로 변하는 것이 있다는 게 신기했어요.</p> <p>교사: 좋아요.</p>	
구별	<p>교사: 영상에서 봤듯이 연속이라는 개념과 불연속이라는 개념이 있어요. 자, 이제는 영상에 나온 것 말고 어떤 예들이 있을지 직접 찾아보도록 합시다. 여러분들이 알고 있는 것 중에 무엇이 있을지 생각해 보도록 해요.</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: (구글 슬라이드 링크를 학생들에게 보내며) 각 조는 본인 조에 해당하는 슬라이드에 작성해주세요.</p> <p>(학생들은 4인 1조를 이루며 총 5개의 조가 있다. 각 조는 슬라이드 1장을 담당한다. 즉, 1조는 첫 번째 페이지, 2조는 2번째 페이지, 이런 식이다.)</p> <p>교사: 자, 모두들 다 작성했나요?</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: (구글 슬라이드 화면을 공유하며) 자, 그러면 1조부터 무엇을 작성했는지 한 번 확인해볼까요?</p> <p>(학생들과 함께 각 조가 작성한 내용을 두루 살피며 '연속'의 실예와 비예가 제대로 작성되었는지 확인한다. 혹시 오류가 있다면 고쳐준다.)</p>	7분
개념 정의	<p>교사: 자, 각 조에서 발표한 '연속'의 사례들을 다 살펴보았습니다. 이제 이 '연속'을 무엇이라고 정의할지 생각해 보도록 하죠.</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: (구글 슬라이드 링크를 공유하며) 각 조에 해당하는 페이지에서 각자가 생각하는 '연속'이 무엇인지 간단하게 적어보세요.</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: 자, 모두들 다 작성했나요?</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: (구글 슬라이드 화면을 공유하며) 자, 그러면 1조부터 무엇을 작성했는지 한 번 확인해볼까요?</p> <p>(학생들과 함께 각 조가 작성한 내용을 읽어본다.)</p> <p>(여기에서의 '연속'은 아직 수학적으로 엄밀하게 정의되는 연속이 아니고 우리가 직관적으로 이해하는 '연속'이다)</p>	7분
전이	<p>교사: 자, 우리가 상식적으로, 직관적으로 생각하는 '연속'에 대해 알아보았어요. 이제는 한 단계 업그레이드 해보겠습니다. 우리가 중학교 때부터 배워온 함수에서 연속을 생각해 볼 거예요.</p>	

<p>구별</p>	<p>교사: (공유된 화면에 함수의 그래프를 띄우며) 자, 교과서에 나와 있는 대표적인 그래프를 가져와봤어요. 이 중에서 연속인 함수의 그래프는 무엇일까요?</p>  <p>[그래프 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]</p> <p>학생: 첫 번째 그래프요.</p> <p>교사: 네, 맞습니다. 두 번째와 세 번째는 왜 연속이지 않은 거죠?</p> <p>학생: 끊어져 있어요.</p> <p>교사: 딱 봐도 그렇죠? 너무나 당연한 얘기죠? 그러나 수학적으로는 이것을 엄밀히 정의하고 어떤 조건을 만족해야 함수가 연속이라고 할 수 있는지 따져봐야 해요.</p> <p>학생: 어려울 것 같아요.</p> <p>교사: 네, 그렇게 느껴질 수 있어요. 그러나 여러분들은 할 수 있어요. 천천히 함께 고민해봅시다.</p> <p>학생: 네.</p>	<p>3분</p>
<p>개념 정의</p>	<p>교사: (구글 슬라이드 링크를 공유하며) 자, 각 조에 해당하는 페이지에서 함수의 '연속'을 무엇이라고 정의할 것인지 한 번 작성해보세요. 단, 교과서를 참고하지 말고 순수하게 본인의 생각을 적어보세요. 틀려도 괜찮습니다. 여러분이 스스로 생각해보는 것이 가장 중요해요.</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: 자, 모두들 다 작성했나요?</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: (구글 슬라이드 화면을 공유하며) 자, 그러면 1조부터 무엇을 작성했는지 한 번 확인해볼까요? (학생들과 함께 각 조가 작성한 내용을 살펴본다.)</p> <p>교사: 자, 신기하게도 비슷한 내용들이 꽤 나오고 있네요. 우리 이것들을 마지막 슬라이드에 다 옮겨볼까요? 뭔가가 나올지도 모르겠네요.</p> <p>학생: 네.</p> <p>교사: 자, 우리가 공통적으로 생각한 함수의 연속은 이런 것이네요? 우리 이제 교과서에는 어떻게 정의되어 있는지 살펴볼까요?</p> <p>학생: 네.</p> <p>(교과서에 나온 함수의 연속 정의를 제시한다.)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>일반적으로 함수 <math>f(x)</math>가 실수 <math>a</math>에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, <math>f(x)</math>는 <math>x = a</math>에서 <b>연속</b>이라고 한다.</p> </div>	<p>12분</p>

	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 10px;"> <p>(i) 함수 <math>f(x)</math>는 <math>x = a</math>에서 정의되어 있다. ✓</p> <p>(ii) 극한값 <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math>가 존재한다. ✓</p> <p>(iii) <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math></p> </div> <p>[정의 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]</p> <p>교사: 자, 어때요?</p> <p>학생: 아, 아까워요. 이건 생각지도 못했네요.</p> <p>교사: 네, 그래도 상당히 근접한 정의였어요. 아주 잘했습니다, 여러분. 자, 선생님이 누누이 말해왔지만 정의는 이름과도 같아요. 즉, 정체성이예요. 그러니 반드시 기억해야 합니다. 알겠죠?</p> <p>학생: 네.</p>	
<p>실예</p>	<p>교사: 자, 여기 교과서에 나온 대표적인 예를 함께 살펴보겠어요.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>[그래프 출처: 좋은책신사고 수학Ⅱ, 고성은 외]</p> <p>교사: 자, 이 함수의 식은 어떻게 될까요?</p> <p>학생: <math>f(x) = x + 1</math>이요.</p> <p>교사: 네, 잘했어요. 몇 차 함수죠?</p> <p>학생: 1차 함수요.</p> <p>교사: 네, 맞습니다. 1차 함수는 보시다시피 어떻게 생겼나요? ✓</p> <p>학생: 직선이에요.</p> <p>교사: 네, 맞아요. □□야, 이 그래프는 <math>x = 1</math>에서 연속인가요?</p> <p>□□: 네.</p> <p>교사: 왜 그렇죠?</p> <p>□□: <math>x = 1</math>에서 함수값이 존재하고, 극한값도 존재하고, 그 둘의 값이 같아요.</p> <p>교사: 네, 맞습니다. 자, 이번엔 ☆☆야. <math>x = 1</math>에서 함수값은 얼마인가요?</p> <p>☆☆: 2요.</p> <p>교사: 네, 좋습니다. 자, 그러면 이번에는 ▽▽야. <math>x = 1</math>에서 극한값은 얼마죠?</p> <p>▽▽: <math>x = 1</math>에서는 우극한이 2이고 좌극한도 2이므로 극한값은 2예요.</p> <p>교사: 네, 맞아요. 잘했어요.</p>	<p>3분</p>
<p>비예</p>	<p>교사: 자, 모두들 잘 이해한 것 같으니 이번엔 불연속에 대해 구체적으로 생각해볼 거예요. (교과서 화면을 공유하며) 교과서 33쪽입니다.</p>	<p>12분</p>

지금 서로 다른 네 가지 조건이 제시되어 있어요. 각 경우에 해당하는 함수의 예를 찾아서 그 그래프를 그려보도록 하겠습니다. 정답은 없으니 본인이 생각하는 대로 편안하게 한 번 해보세요. 이번에는 각 조가 4명이니 각자 한 문제씩 맡아서 해보겠습니다. 조원들 모두가 문제를 다 풀면 각자 맡은 문제에 대해 돌아가면서 설명해보도록 하세요. 선생님이 돌아다니며 관찰하고 있다는 것 잊지 마세요. 시간은 7분을 드리겠습니다.

(각 조를 ZOOM의 소그룹 회의실에 할당한다. 학생들의 활동을 살펴보기 위해 소회의실을 돌아다닌다.)

(1)  $x=1$ 에서 정의되지 않고, 극한값  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하지 않는다.

(2)  $x=1$ 에서 정의되지 않고, 극한값  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재한다.

(3)  $x=1$ 에서 정의되어 있고, 극한값  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하지 않는다.

(4)  $x=1$ 에서 정의되어 있고, 극한값  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하지만

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이다.

[네 가지 분류 출처: 좋은책신사고 수학II, 고성은 외]

교사: (모든 학생들이 본 회의실로 돌아온 후) 선생님이 돌아다니면서 확인해보니 정말 다양한 예가 나왔어요. 아주 좋아요. 이렇게 여러 가지 사례가 있다는 것이 참 재미있죠?

학생: 네.

교사: 자, 이 활동을 통해 함수가 언제 불연속이 되는지 한 번 생각해봤을까요? 우리 ◎◎이가 대답해볼까요?

◎◎: 네. 함수  $f(x)$ 가 교과서 31쪽에 나온 (i), (ii), (iii) 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면  $f(x)$ 는  $x=a$ 에서 불연속이 됩니다.

교사: 와. 훌륭해요. 정답이에요. (교과서 화면을 공유하며) 교과서 31쪽에 연속과 불연속에 대한 설명이 모두 나와 있어요. 아주 중요합니다. 다들 밑줄 짹짹 그어주세요.

### 연습

실생활  
관련  
문제

교사: (교과서 화면을 공유하며) 자, 이제 오늘의 숙제를 드리겠습니다. 교과서 35쪽을 가볼게요. 거기에 수학 역량 플러스가 있어요. 각자 문제를 해결하고 사진을 찍어 Slack 1차시 채널에 올려주세요. 기한은 내일 17시까지예요. 그리고 항상 나가는 과제 기억하시죠?

학생: 네, 수학 일기랑 Q & A 올리기로.

→ 영웅  
분쟁

숙제  
확인할  
것이다!

교사: 네, 그것도 잊지 말고 올려주세요. 이상입니다. 수고하셨습니다. 학생: 네, 감사합니다.
--

참고문헌

고성은 외. (2018). 수학Ⅱ, 서울: 좋은책신사고

? 대안 2 ✓