

수학

교수-학습 지도안

담당교과목 : 교수체제설계

담당교수님 : 임철일 교수님

제출일 : 2015. 04. 13.

학과 : 교육학과 교육공학전공 석사과정

제출자 : 2015-21556 조해리

[수업 청사진]

- ◆ 원리 : 로그의 연산 원리
- ◆ 대상 학습자 : 고등학교 2학년
- ◆ 수업 수준 : 4
- ◆ 기대되는 행동 유형 : 예측, 설명, 해결
- ◆ 학습 목표
 1. 지수법칙을 이용하여 로그의 여러 가지 연산 원리를 증명할 수 있다.
 2. 로그의 여러 가지 연산 원리를 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
- ◆ 관련 자료

PPT자료, 유인물(개념, 문제), 멀티미디어자료(동영상)¹⁾

방법	실행
1. 제시	
1. 목표제시 1.1 주의력 환기	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 일상생활 속에서 발견할 수 있는 로그의 사례를 제시한다. ▪ 그림을 제시한다. ▪ 목표를 제시한다.
2. 선수학습 2.1 주의집중	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 동영상을 보여줌으로써 거듭제곱, 지수 표기법의 효율성과 거듭제곱 수에 대한 직관적인 이해를 도모하고 동기를 유발한다. ▪ 지수법칙을 상기시킨다.
3. 전형적 예 3.1 주의집중	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 학생들의 조별 활동과 교사-학생들 간의 대화적 토의를 통해 로그 연산의 원리를 확인한다. ▪ 대화적 토의를 칠판에 즉각적으로 정리해서 학생들과 공유한다.
4. 일반성 4.1 주의집중	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 일반성을 제시한 후 증명한다. ▪ PPT자료와 판서를 활용한다. ▪ 증명과정에 대해 학생들이 수업시간에 유인물 빈칸에 적을 수 있도록 지도한다.
5. 예 5.1 다양성 5.2 난이도 증가 5.3 주의집중	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 다양한 예를 제시한다. ▪ 쉬운 예를 먼저 제시하고, 어려운 예를 후에 제시한다. ▪ PPT자료를 활용한다.

1) PPT자료에 포함되어 있음

II. 연습

6. 연습

6.1 난이도증가

6.2 다양성

6.3 주의집중

- 다양한 연습 문제를 제시한다.
- 쉬운 연습 문제를 먼저 풀도록 하고, 어려운 문제를 후에 풀도록 지도한다.
- 풀이과정을 설명하기 전에 정답을 먼저 제시하여 스스로 채점하고 진단할 수 있는 기회를 제공한다.
- PPT자료와 유인물을 활용한다.

III. 피드백

7. 피드백

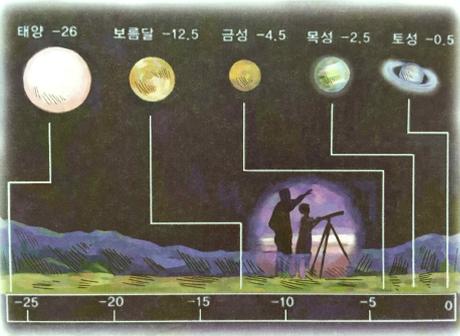
7.1 확인

7.2 교정

7.3 유도

- 학생의 응답에 즉각적으로 피드백을 제공한다.
- 옳은 응답에 대하여 확인과 칭찬을 한다.
- 부족한 응답에 대하여 교정해 준다.

[세부 교안]

방법	실행	시간(50분)/자료
<p>I. 제시</p>		
<p>1. 목표제시 1.1 주의력 환기</p>	<p>교사: 이번 시간에는 로그의 연산 원리에 대해서 알아보도록 하겠습니다. (준비한 그림들을 보여주며, 로그의 연산이 실생활에 유용하게 쓰이는 사례 -지진의 규모, 자동차의 내부 소음, 별의 등급과 밝기 관계 등- 을 제시한다.)</p> <p>(그림1) 지진의 규모는 로그로 나타낸다.</p>  <p>(그림2) 별의 밝기 : 1등성보다 더 밝은 별의 등급 표시</p> 	<p>3분</p> <p>PPT#2 그림1</p> <p>그림2</p>
<p>1.2 동기화</p>	<p>교사 : 이처럼 로그는 일상생활에서 매우 유용하게 사용되고 있어요. 특히, 계산 도구로서 로그의 힘은 그것에 의해서 곱셈과 나눗셈을 좀 더 간단한 연산인 덧셈과 뺄셈으로 전환시킬 수 있다는 것이예요.</p>	
<p>1.3 학습순서 제시</p>	<p>교사 : 오늘은 저번 시간에 배웠던 거듭제곱과 지수법칙에 대해 살펴보고, 엄청난 힘을 가진 로그의 연산원리에 대해 공부하게 될 거예요. 수업종료 10분을 남겨두고 스스로 문제를 푸는 시간이 있을 테니 다들 긴장하고 수업을 열심히 들어야 해요. 자, 그럼 이제부터 ‘로그,인’ 해볼까요?</p> <p>학생 : (웃음)</p>	<p>PPT#3</p>

	<p>교사 : 그럼 1조에게 먼저 질문할게요. $2^x = 15$의 해가 무엇인가요?</p> <p>학생 : $x = \log_2 15$입니다.</p> <p>교사 : 네 맞아요. 그렇다면 2조, $2^x = 3$와 $2^x = 5$의 해는 각각 무엇인가요?</p> <p>학생 : $x = \log_2 3$과 $x = \log_2 5$입니다.</p> <p>교사 : 그렇다면 2조에게 한 번 더 질문할게요. 2^{x_1}과 2^{x_2}를 곱한 것은 무엇인가요?</p> <p>학생 : $2^{x_1 + x_2}$입니다.</p> <p>교사 : $3 \times 5 = 15$이기 때문에 그렇다면 $2^{x_1 + x_2}$는 15가 되겠군요. 그럼 여러분 모두 $x_1 + x_2$의 값은 무엇이 되죠?</p> <p>학생 : $\log_2 15$가 되네요. 신기해요.</p> <p>교사 : 그렇죠. 조금 전 1조에서 이야기했던 답과 똑같죠. 그렇다면, x, x_1, x_2 사이에 어떤 관계가 있을까요?</p> <p>학생 : $x = x_1 + x_2$입니다.</p> <p>(3조와 4조 동일하게 진행 - $2^{x_1} = 18, 2^{x_2} = 6, 2^x = 3$) ...</p> <p>그렇다면, x, x_1, x_2 사이에 어떤 관계가 있을까요?</p> <p>학생 : $x = x_1 - x_2$입니다.</p> <p>(5조와 6조 동일하게 진행 - $2^{x_1} = 3^2, 2^{x_2} = 3$) ...</p> <p>그렇다면, x_1, x_2 사이에 어떤 관계가 있을까요?</p> <p>학생 : $x_1 = 2x_2$입니다.</p>	
<p>4. 일반성</p>	<p>교사 : 맞아요. 저번 시간에 배웠던 개념을 토대로 로그의 밑은 a로 하고, 진수는 M과 N으로 둔 후 다시 풀어서 정리하면 이렇게 되겠죠.</p> $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ $\log_a M^k = k \log_a M$ <p>교사 : 이제 이와 같은 관계가 로그의 조건을 만족시키는 임의의 수에 대하여도 성립하는지 함께 알아보겠습니다. 이를 증명하는 과정에서 지수법칙이 중요한 역할을 할 것입니다. 여러분은 저번 시간에 나누어 준 유인물을 꺼내서 빈칸에 증명과정을 함께 써내려가길 바랍니다. 증명이 끝난 후 문제를 푸는 시간에 선생님이 돌아다니면서 모두 확인할 것이니 열심히 채워 넣으세요.</p>	<p>20분 PPT#8</p> <p>칠판 (판서)</p>

4.1 주의집중

(판서를 하며 증명과정을 설명한다.)

(판서내용 : 색 별로로 표시)

<로그의 기본 연산 원리>

$a > 0, a \neq 1, N > 0, M > 0$ 일 때,

(1) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

(증명) $a^1 = a, a^0 = 1$

(2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(증명) 로그 값을 한 문자로 치환

$x = \log_a M, y = \log_a N$ 노란색

로그의 정의로부터(로그→지수),

$a^x = M, a^y = N$

필요한 값! 지수법칙

$MN = a^x a^y = a^{x+y}$

로그의 정의로부터(지수→로그),

$\log_a MN = x + y$ 분홍색

$\therefore \log_a MN = \log_a M + \log_a N$ 파란색

(3) $\log_a M^k = k \log_a M$

(증명) 로그 값을 한 문자로 치환

$x = \log_a M$ 노란색

로그의 정의로부터(로그→지수),

$a^x = M$

필요한 값! 지수법칙

$M^k = a^{xk}$

로그의 정의로부터(지수→로그),

$\log_a M^k = xk$ 분홍색

$\therefore \log_a M^k = k \log_a M$ 파란색

교사 : 모두 빈칸을 잘 채워 넣었나요?

학생 : 네.

교사 : 이러한 과정을 통해 여러분은 앞으로 로그의 기본 연산 원리를 증명할 수 있게 되었습니다.

교사 : 로그의 기본 연산 원리가 무엇인지 설명할 수 있고 또 그 원리를 증명할 수 있다면 바로 다음에 배울 원리들에 대해서도 쉽게 증명을 할 수 있어요.

	<p><로그의 여러 가지 연산 원리></p> <p>$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때,</p> <p>(1) $\log_a m^n = \frac{n}{m} \log_a b$ (단, m, n은 실수, $m \neq 0$)</p> <p>(증명) $\log_a m^n = \frac{\log_c b^n}{\log_c a^m} = \frac{n \log_c b}{m \log_c a} = \frac{n}{m} \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{n}{m} \log_a b$</p> <p>$\therefore \log_a m^n = \frac{n}{m} \log_a b$ 파란색</p> <p>(2) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ (단, $b \neq 1$)</p> <p>(증명) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$</p> <p>(3) $a^{\log_a b} = b$</p> <p>(증명) $\log_a a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_a a = \log_a b$</p> <p>$\therefore a^{\log_a b} = b$ 파란색</p> <p>(4) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$</p> <p>(증명) $a = c^{\log_c a}$ 노란색</p> <p>$a^{\log_c b} = (c^{\log_c a})^{\log_c b} = (c^{\log_c b})^{\log_c a} = b^{\log_c a}$ 분홍색</p> <p>$\therefore a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ 파란색</p> <p>교사 : 여러분 빈칸을 모두 채워 넣었나요? 학생 : 네. 교사 : 설명도 들으면서 동시에 손으로 열심히 적었으니</p>	<p>PPT #11</p>
<p>5. 예(1)</p>	<p>교사 : 자, 이 식을 보세요. 굉장히 복잡해 보이지만 로그의 연산 원리를 활용하면 하나의 값으로 간단하게 나타낼 수 있어요.</p>	<p>8분</p>
<p>5.1 다양성 5.2 주의집중</p>	<p>(PPT#12_연습문제1 제시)</p> <p>$(\log_2 \sqrt{10})^2 + (\log_2 \sqrt{5})^2 - 2 \log_2 \sqrt{10} \log_2 \sqrt{5}$ 를 간단히 하면?</p> <p>교사 : 자 먼저, $\log_2 \sqrt{10}$ 을 a로 치환하고, $\log_2 \sqrt{5}$ 를 b로 치환하면, 주어진 식은 $a^2 + b^2 - 2ab$가 되죠. 인수분해 공식에 의해 $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$가 되겠죠. 자 여기서 앞서 배운 로그의 기본 연산 원리에 의해,</p> <p>$a - b = \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \sqrt{5} = \log_2 \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \log_2 \sqrt{2}$ 가 됩니다. 또 여기서 로그의 여러 가지 연산 원리에 의해,</p>	<p>PPT #12</p>

<p>예(2) 다양성 주의집중</p>	<p>$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$가 됩니다. 지금까지 로그의 연산 원리를 활용해서 식의 값을 간단히 하는 예를 살펴보았어요.</p> <p>교사 : 이번에는 밑의 변환 원리를 이용한 예를 살펴보까요? 다음의 문제를 풀어 봅시다. (PPT#13_연습문제 2 제시)</p> <p>$10^{\log_{10} 2} + \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2$의 값은?</p> <p>교사 : 여기서는 log 값들이 곱해져 있는 형태가 있네요. 복잡해 보이지만 우리가 앞서 배운 밑의 변환 원리를 활용하면 간단히 풀린답니다.</p> <p>교사 : 우선, 밑을 모두 2로 변환하여 식을 다시 정리해 보면, $\log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2 = \frac{\log_2 3}{\log_2 2} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 2}{\log_2 5}$ 이므로 분자와 분모가 각각 소거되어 결국 원래 식의 값은 $10^{\log_{10} 2} + 1 = 2 + 1 = 3$이 됩니다.</p>	<p>PPT #13</p>
<p>예(3) 잘못된 예</p>	<p>(PPT#14 제시) (학생들이 자주 실수하는 ‘로그의 연산 원리를 잘못 적용한 예’를 제시한다.)</p> <p>교사 : 제시된 식들은 로그의 연산 원리를 잘못 적용한 예로 많은 학생들이 계산을 할 때 헛갈리고는 해요. 오늘 배운 증명 과정을 정확하게 숙지하고 많은 문제를 풀어보면 실수를 줄일 수 있겠죠?</p>	<p>PPT #14</p>
<p>II. 연습</p>		
<p>연습</p>	<p>교사 : 이제부터 유인물에 나오는 문제를 풀도록 하겠습니다. 기본 5문제, 도전 2문제로 구성되어 있는데 저번 시간에 기본 1번과 기본 2번 문제는 풀었으니 남은 5문제를 10분 내로 풀기 바랍니다. 정답을 공개한 후 각자 스스로 채점을 해 보고 기본 문제에 대해서는 개별적으로 질문을 하도록 합니다. 도전 문제는 다소 난이도가 높으므로 다음 수업 시간에 함께 풀도록 하겠습니다.</p> <p>(교실 전체를 돌아다니면서 학습 속도가 느리거나 어려움을 느끼는 학생들에게 개별적으로 간단한 피드백을 해주고 잘하고 있는 학생들에게 도전 문제를 모두 맞힐 수 있을 것이라고 말하면서 자신감을 불어 넣어준다.)</p>	<p>4분 유인물 PPT #15 -19</p>

<p>연습 가 (예측)</p>	<p>교사 : 제시된 식에서 k의 값을 구해 보세요.</p> <p>(유인물_기본 3번 문제 제시)</p> <p>등식 $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_6 2} = \frac{1}{\log_k 2}$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.</p>	
<p>연습 나 (설명)</p>	<p>교사 : 제시된 식 중에서 옳은 것을 모두 찾고 왜 등식이 성립하는지 설명하세요.</p> <p>(유인물_기본 5번 문제 제시)</p> <p>[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>[보기]</p> <p>ㄱ. $2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \dots + \log_2 10} = 10!$</p> <p>ㄴ. $\log_2 (2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{10})^2 = 55^2$</p> <p>ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3) \dots (\log_2 2^{10}) = 55$</p> </div>	
<p>연습 다 (해결) 난이도 증가</p>	<p>교사 : 다음 문제를 해결해 보세요.</p> <p>(유인물_도전 5번 문제 제시)</p> <p>1등급의 별의 밝기는 6등급의 별의 밝기의 100배이고, 각 등급 간의 밝기의 비가 일정하며, 맨눈으로 볼 수 있는 별 중 가장 어두운 별의 등급은 6등급이라고 한다. 맨눈으로 본 별의 밝기보다 400배 밝게 보이는 천체 망원경으로 q로 수 있는 가장 어두운 별의 등급을 x라 할 때, $10x$의 값을 구하여라. (단, $\log_{10} 2 = 0.3$으로 계산한다.)</p>	
<p>III. 피드백</p>		
<p>피드백</p>	<p>(연습 가, 연습 나에 해당하는 기본 문제에 대한 정답을 말하면 칭찬을 해주고 틀리게 말하면 힌트를 주어 정답을 말하도록 유도한다. 연습 가와 연습 나를 해결하면 좀 더 심화된 연습 다를 풀 수 있도록 지도한다.)</p>	<p>1분</p>
<p>차시예고</p>	<p>교사 : 이번 시간에는 로그의 계산 원리에 대해서 배웠습니다. 유인물에 직접 써 내려간 증명과정을 반복해서 적어보고, 다양한 문제를 통해 로그의 계산을 연습하기 바랍니다. 다음 시간에는 상용로그에 대해서 배우도록 하겠습니다.</p>	<p>PPT #20</p>

[교안 개발의 논리]

■ 교과 영역

본 수학 교수·학습 지도안은 고등학교 2학년 1학기 수의 중단원 III. 로그함수, 소단원 1. 로그의 내용을 바탕으로 한다. 이 단원 전체의 목표는 로그의 뜻을 알고 로그 연산의 기본 원리와 밑의 변환 원리, 그리고 로그의 여러 가지 기타 연산 원리들을 증명하고, 이를 이용해 문제를 해결할 수 있는 것이다. 본 교수·학습 지도안은 로그의 두 번째 차시에 해당하며 한 차시 전의 내용은 로그의 정의와 거듭제곱 및 지수법칙을 다루었다.

■ 학습자 특성

보편적으로 지수에 대한 개념은 초등학교 때부터 발달하지만 쉽게 사용하지 않는 로그에 대해서 일반적인 고등학생들은 낯선 표기법과 복잡한 연산의 원리를 다소 어렵게 느낄 수도 있다. 본 교수·학습 지도안은 고등학교 2학년 이과생들을 학습자 집단으로 설정하였기 때문에 난이도 ‘중상’ 정도에 해당하는 4 수준의 수업이 개발되었다.

■ 학습과제의 특성과 학습목표

‘로그의 연산 원리’는 지적 기능의 하위 요소 중 원리에 해당한다. 본 수업은 로그의 연산 원리를 학습하기 위해 ‘원리 적용’을 목표로 구성되었다. 다시 말해, 학습한 원리를 바탕으로 설명, 예측, 해결할 수 있도록 하는 것이 교수 목표이다.

■ 구성 원리

본 교수·학습 과정안은 임철일(2012)의 ‘원리의 적용을 위한 교수설계 원리’를 바탕으로 구성되었다. 원리의 적용은 예측, 설명, 해결과 같은 종류를 포함한다. 이는 본 교수·학습 과정안의 기대되는 행동 유형으로 제시되고, 연습문제를 통해 활용될 수 있게 하였다. 본 수업은 원리 적용을 위해 활용되는 실예의 관찰, 일반성, 연습 및 피드백 전략을 사용하며, 교사나 또래의 도움을 통해 실예를 관찰 및 탐색함으로써 발견적 학습이 이루어지게 된다.

제시: 전형적 예 우선 저번 시간에 배운 거듭제곱의 개념과 지수법칙을 바탕으로 지수나 로그의 단원에서 가장 전형적으로 쓰이는 ‘1보다 큰 가장 작은 자연수’인 ‘2’를 밑으로 하는 거듭제곱의 곱을 구하도록 한다. 두 조씩 양 변의 값을 각각 구하게 하고 질문과 피드백을 통해 로그의 기본 연산 원리를 발견할 수 있도록 한다.

제시: 일반성 전형적인 예를 통해 발견한 원리를 바탕으로 로그의 조건을 만족하는 임의의 수에 대해 발견한 로그의 기본 연산 원리가 모두 성립할 수 있음을 보여준다. 밑의 변환 원리와 여러 가지 로그의 연산 원리 역시 동일한 방법으로 일반성을 제시한다.

제시: 실예 로그의 연산 원리가 적용된 실제 예시를 두 가지 보여줌으로써 다양성을 확보하고, 많은 학생들이 헛갈려 하는 로그 연산 원리의 잘못된 적용에 대한 예시

를 보여준다.

연습 수업 후반부에 다양한 연습문제(설명, 예측, 해결 각각에 해당하는 문제 하나씩 제시)를 풀어 보면서 학생들이 배운 원리에 대한 증명과정을 되돌아보고 학습한 원리에 대한 적용 연습을 하도록 한다.

피드백 수업 전 과정에서 학생들에게 원리 적용 학습을 위한 다양한 정보를 제공하고, 학생들의 반응을 칭찬하고 격려하여 동기를 유발시킨다.

■ 환경

교실에 프레젠테이션 자료를 구동할 수 있는 컴퓨터와 대형 화면이 있어야 한다.

[참고문헌]

- 김승태 (2013). 네이피어가 들려주는 로그 이야기. 서울 : (주)자음과모음.
안재찬 (2009). Spier Mathematics 수I(상) 응용편. MSE Research Korea.
임철일 (2012), 교수설계 이론과 모형. 파주 : 교육과학사.
황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2012). 수학교육학신론. 서울 : 문음사.

[참고 웹사이트]

- <http://iled.snu.ac.kr/> 임철일의 교육공학 홈페이지
<http://www.mathlove.kr/shop/mathlove/index.php> 수학사랑 홈페이지
<http://www.iteach4u.kr/2008/> 아이티치포유(교사수업연구모임) 홈페이지