

[절차의 적용 수업지도안]


I. Blueprint(수업 청사진)

- 학 습 주 제 : "계차수열을 이용하여 수열의 일반항 구하기"
- 학습대상자 : 고등학교 2학년
- 수 업 수 준 : 중간
- 수 업 시 간 : 50분
- 학 습 목 표
 - 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있다.

□ 개요(Overview)

방 법	실 행
동기유발	<ul style="list-style-type: none"> • 계차수열과 관련이 있는 하노이의 탑에 관한 이야기로 관심을 집중시킨다.
선수학습	<ul style="list-style-type: none"> • 등차수열, 등비수열을 보여주고, 계차수열과 차이점을 확인한다.
목표제시	<ul style="list-style-type: none"> • 계차수열이 사용되는 예를 보여주면서 일반항을 구하는 것이 목표임을 제시한다.
절차	<ul style="list-style-type: none"> • 직접 예시 문제를 푸는 과정에 대해 시범을 보이면서 단계를 설명한다. • 다시 한 번 하노이의 탑 문제로 돌아가 각 단계에 대해 강조한다.
연습	<ul style="list-style-type: none"> • 연습문제를 제시하여 풀 수 있도록 한다.
피드백	<ul style="list-style-type: none"> • 학생의 대답에 즉시 피드백을 제공한다. • 정답에 대하여 확인과 칭찬을 한다. • 오답에 대하여 교정을 위한 힌트를 제공한다.

II. Lesson Plan(수업 지도안)

방 법	실 행	시 간
<p>동기유발</p>	<p><Intro> 교사: 자 이 사진을 여러분 많이 보셨을 것입니다. 실제로 해본 학생들도 있을텐데요. 바로 '하노이의 탑'입니다.</p> <p style="text-align: center;"><하노이의 탑></p>  <p>교사 : 전설에 따르면 베트남의 하노이 베나레스에는 세계의 중심이 있고, 그 곳에는 아주 큰 사원이 있는데 이 사원에는 높이 50cm 정도 되는 다이아몬드 막대 3개가 있습니다. 그 중 한 막대에는 천지 창조 때에 신이 구멍을 뚫린 64장의 순금으로 된 원판을 크기가 큰 것부터 아래에 놓이도록 하면서 차례로 쌓아 놓았고 신은 승려들에게 밤낮으로 쉬지 않고 한 장씩 원판을 옮기어 빈 다이아몬드 막대 중 어느 한 곳으로 모두 옮겨 놓도록 명령하였습니다. 만약 승려가 정말 부지런하여 1초에 한 번씩 원판을 옮긴다고 할 때, 얼마나 시간이 걸릴까요?</p> <p>학생 : 수열 문제인 것 같긴 한데, 지금까지 배운 등차수열, 등비수열로는 풀기 어려운 것 같습니다.</p>	<p>7분</p>
<p>선수학습</p>	<p><선수학습 상기> 교사 : 네 그렇습니다. 잘 짐작하셨는데 이 문제는 수열 문제입니다. 그렇지만 지금까지 배운 등차수열과 등비수열과는 다른 규칙을 가지고 있습니다. 등차수열은 어떤 수에 차례로 일정한 수를 더하여 이루어진 수열이었고 그 일정한 수를 공차라고 하였습니다. 등비수열은 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 그 다음항이 얻어지는 수열이며 그 일정한 수를 공비라고 하였습니다. 기억합니까?</p> <p>학생 : 네.</p> <p>교사 : 또 우리는 등차수열과 등비수열의 합을 구하는 공식을 배웠습</p>	<p>5분</p>

	<p>니다. 공식 기억하는 학생 있습니까? (학생 대답한다)</p>	
<p>목표제시</p>	<p>교사 : 네 아주 잘 했습니다. 여러분이 등차수열, 등비수열, 그리고 그 합공식을 알고 있다면 문제없습니다. 우리는 이들을 활용하여 새로운 수열인 ‘계차수열’을 이용하여 수열의 일반항을 어떻게 구할 수 있을지 살펴보겠습니다. 먼저 이 수열을 한 번 봅시다.</p> <p style="text-align: center;">1, 3, 7, 13, 21, 31, ...</p> <p>교사 : 얼핏 보기에는 별로 규칙이 없어 보이지만 우리는 이전에 배웠던 노하우를 통해 이 수열의 일반항을 이끌어낼 것입니다. 우리가 수열의 규칙을 찾기 위해서 가장 먼저 하는 일이 무엇이죠?</p> <p>학생 : 각 항의 차이를 보는 것입니다.</p>	<p>4분</p>
<p>절차</p>	<p>교사 : 그렇습니다. 계차수열도 마찬가지입니다. 먼저 각 항의 차이를 살펴봐야 합니다. 같이 해볼까요?</p> <p><시범></p> <p>교사 : 여러분은 일단 수열을 봤을 때, 차이가 등차냐, 등비냐를 판단해야 합니다. 둘 다 아니라면 계차수열을 의심해 봅니다. 그렇다면 계차수열이 무엇이나. 뒤의 항에서 앞의 항을 빼보는 작업을 실시해 봅니다. 자, 둘째항에서 첫째항을 빼면 2죠. 셋째항에서 둘째항을 빼면 4입니다. 넷째항에서 셋째항을 빼면 6입니다. 마찬가지로 계속해서 진행을 하면 다음과 같은 규칙이 있다는 것을 알 수 있습니다.</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{ccccccccc} 1, & 3, & 7, & 13, & 21, & 31, & \dots \\ & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & \dots \end{array}$ </div> <p>교사 : 어디서 많이 봤던 수열이죠. 일반항을 유도하기 위해 잠시 이를 기호로 표현해 봅시다. 여기서 각 항의 차이로 이루어진 밑의 수열을 계차수열이라고 하고 일반적으로 b_n으로 표기합니다. 원 수열의 경우 a_n으로 표기합니다.. 그렇다면 b_n을 다음과 같이 나타낼 수 있을 것입니다.</p> $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ <p>자 그러면 이 b_n을 이용하여 우리는 a_n을 찾아낼 것입니다. 아까 했던 것을 숫자로 옮겨서 a_n이 나올 때까지 실시합니다. 그러면</p>	<p>(시범) 15분 (강조) 10분</p>

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ \dots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

와 같은 식이 나오겠죠. 이를 변변 더해주고 이항을 해주면

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

가 되어

결국, 이와 같은 식이 나오게 됩니다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

이것이 계차수열을 이용해 일반항 a_n 을 찾아내는 방식이 되겠습니다. 그렇다면 위의 문제를 이에 적용해 본다면,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \text{ 이 되고 이를 풀어주면}$$

결국 a_n 은 $n^2 - n + 1$ 이 됩니다. 이 때 이 식이 정말로 맞는지 확인하고 싶다면 n 에 1부터 대입하여 원 식의 값과 일치하는지를 확인하면 됩니다. 1을 대입하면 1이 나오고 2를 대입하면 3이 나오고 3을 대입하면 7이 나오네요. 이를 통해 구한 식이 일반항임을 다시 한 번 확인했습니다.

<강조>

교사 : 자 그렇다면 도입부에 문제를 드렸던 하노이의 탑의 경우 일반항을 어떻게 구할 수 있을까요? 먼저 원판의 개수에 따른 옮기는 횟수를 구해봅시다.

원판의 개수	1	2	3	4	5	6
옮기는 횟수	1	3	7	15

교사 : 이와 같이 나오게 됩니다. 이때 1, 3, 7, 15 ...는 등차수열도 등비수열도 아니기 때문에 계차수열일 가능성을 의심해 보고 각 항의 차이를 살펴보면 계차수열은 2, 4, 8 ...이 되어 계차수열의 일반항은 2^n 이라는 것을 알 수 있습니다. 그렇다면

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2) \text{ 의 공식에 대입하여 일반항을 구해보}$$

면 $a_n = 2^n - 1$ 이라는 것을 구할 수 있습니다. 도입부에 나온 하노이의 탑의 경우 $n=64$ 이기 때문에, 결국 $2^{64} - 1$ 초가 걸린다는 말인데, 이를 시간으로 환산하면 대략 5833억년이 나옵니다. 본래 전설에 따르면 64개의 원판이 본래의 자리를 떠나 다른 한 막대로 모두 옮겨졌을 때에는 탑과 사원, 승려들은 모두 먼지가 되어 사라지면서 세상의 종말이 온다고 하는데 과장이 아님을

	알 수 있습니다.	
평가	<p>교사 : 자, 이제는 여러분들이 직접 풀어보는 시간을 갖도록 해보겠습니다. 앞에 제시된 평가문항 (1)번과 (2)번을 5분간 풀어보도록 하겠습니다.</p> <p>(1) 등차수열 혹은 등비수열인지 확인해 봅시다. (2) 둘 다 아니라면 계차수열인지 의심해 봅시다. (3) 각 항의 차이를 구해봅시다. (4) (3)에서 구한 계차수열의 일반항을 구해봅시다. (5) 공식을 이용하여 원수열의 일반항을 구해봅시다.</p>	5분
피드백	학생들이 연습문제를 해결하는 동안 교사는 돌아다니면서 과정을 확인하고 잘 하지 못하고 있는 학생은 힌트를 주거나 다시 지도하고 잘 하고 있는 학생에게는 칭찬을 한다.	4분

평가문항	<p>(1) 1, 2, 5, 10, 17, 26 ... 의 일반항을 구하여라. (2) 5, 8, 17, 44, 125, ...의 일반항을 구하여라.</p>	5분
-------------	---	----

참고문헌

임철일(2012). **교수설계 이론과 모형(2판)**. 파주: 교육과학사.

인터넷 참고자료

- <http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1085836&cid=40942&categoryId=32209>
- <http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=945504&cid=3428&categoryId=3428>
- http://www.ebsi.co.kr/ebs/lms/lmsx/retrieveSbjtDtl.ebs?sbjtId=S20130001181&mnuCd=3&tabId=tb_tab2
- <http://mirror.enha.kr/wiki/%ED%95%98%EB%85%B8%EC%9D%B4%EC%9D%98%20%ED>

2014-01 교수체제설계
임철일 교수님
%83%91

작성자: 성희창
제출일: 4월 28일